



Tratando: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$

$$\tilde{f}[f](\alpha) = \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$

$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tq $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\alpha)| d\alpha < +\infty$

$$\tilde{f}^{-1}[\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

si $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)| d\alpha < +\infty$, $\tilde{f}^{-1} \tilde{f}[f] = f$

Exemplos: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]a, b[\\ 0 & \text{outra} \end{cases} \xrightarrow{\tilde{f}} \hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} i \alpha} (e^{-i\alpha a} - e^{-i\alpha b})$

$$f(x) = e^{-|x|} \xrightarrow{\tilde{f}} \hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + \alpha^2}$$

$$f(x) = e^{-|x|}, \quad \hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\alpha^2}$$

Remarquons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)| d\alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\alpha^2} d\alpha < +\infty$$

then 5.2
 $\Rightarrow$

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\alpha^2} e^{i\alpha x} d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+\alpha^2} d\alpha + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{1+\alpha^2} d\alpha$$

En identifiant partie réelle & imaginaire,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{1+\alpha^2} d\alpha = 0 \quad \& \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+\alpha^2} d\alpha = \pi e^{-|x|}$$

Là où Dirichlet nous permettrait de calculer des séries,

la formule d'inversion permet de calculer des intégrales.

Remarque 5.4:

En général, calculer une $\mathcal{T}ra\mathcal{T}o$, c'est dur!

Pour calculer on a besoin de l'analyse complexe (Analyse IV)

Pour ce cours, on utilisera les tables (§15.5 p.245 du livre.)

§5.2 Propriétés des transformées de Fourier

Proposition 5.5 (continuité, linéarité, composition avec fonctions affines, décalage)

Soit $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux tq

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx < +\infty.$$

Alors,

(i) $\hat{f}$ est continue.

(ii) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}[a \cdot f + b \cdot g] = a \cdot \mathcal{F}[f] + b \cdot \mathcal{F}[g].$

(iii) Si $a \neq 0, b \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(ax+b),$

$$\hat{g}(\alpha) = \frac{e^{i \frac{b}{a} \cdot \alpha}}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\alpha}{a}\right)$$

(iv) Si $g(x) = e^{-ibx} f(x), \quad \hat{g}(\alpha) = \hat{f}(\alpha+b)$

Idée de la preuve $\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$

(i) $\alpha \mapsto e^{-i\alpha x}$ est continue.

(ii) linéarité de $\int$

(iii) Ch. de var:

$$\hat{g}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{f(ax+b)}^y e^{-i\alpha x} dx$$

$$dx = \frac{1}{a} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\alpha \frac{y-b}{a}} \cdot \frac{1}{|a|} dy$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\frac{\alpha}{a} \cdot y} dy}_{\hat{f}\left(\frac{\alpha}{a}\right)} \cdot e^{i\alpha \frac{b}{a}}$$

$$(iv) \hat{g}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-ibx} f(x)}_{g(x)} e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i(\alpha+b)x} dx = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i(\alpha+b)x} dx}_{\hat{f}(\alpha+b)}$$

Théorème 5.6 : Identité de Plancherel.

Soit f continue par morceaux, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$ &

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 dx < +\infty. \quad \text{Alors,}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)|^2 d\alpha$$

Proposition 5.7 $\mathcal{F}[f']$, $(\mathcal{F}[f])'$

(i) Soit $f \in C'(\mathbb{R})$ tq $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)| dx < +\infty$

$$\text{Alors, } \mathcal{F}[f'](\alpha) = i\alpha \mathcal{F}[f](\alpha)$$

Plus généralement, si de plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall 1 \leq k \leq n$,
 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(k)}(x)| dx < +\infty$,

$$\widehat{f}[f^{(n)}](\alpha) = (i\alpha)^n \widehat{f}[f](\alpha)$$

(ii) soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, et $h(x) = x \cdot f(x)$
 tq $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)| dx < +\infty$.

Alors, $\hat{f}$ est dérivable et

$$\hat{f}'(\alpha) = -i \cdot \hat{h}(\alpha)$$

Plus généralement, par récurrence, si $h_k(x) = x^k f(x)$
 et que $\forall 1 \leq k \leq n$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |h_k(x)| dx < +\infty$, alors,

$$\frac{d^n f}{d\alpha^n}(\alpha) = (-i)^n \widehat{f}[h_n](\alpha)$$

Idée de la preuve

$$(i) \text{ IPP: } \mathcal{F}[f'](a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-iax} dx$$

$$\begin{aligned} u &= e^{-iax} & v &= f \\ u' &= (-ia)e^{-iax} & v' &= f' \end{aligned} \quad \text{IPP} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x) e^{-iax} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (-ia) e^{-iax} dx$$

$$\text{Or, } \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty \text{ \& } \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)| dx < +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$= ia \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iax} dx = ia \hat{f}(a)$$

$$(ii) \frac{d}{da} [\hat{f}(a)] = \frac{d}{da} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iax} dx \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{d}{da} [e^{-iax}] dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (-ix) e^{-i\alpha x} dx = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) e^{-i\alpha x} dx$$

$$= -i \mathcal{F}[f_h](\alpha)$$

Exemple 5.7 (un point fixe de $\mathcal{F}^\infty$)

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-x^2/2}$

On pose $h(x) = x \cdot f(x) = x e^{-x^2/2}$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)| dx < +\infty$

$\Rightarrow \hat{f}$ est dérivable et

$$\hat{f}'(\alpha) = -i \hat{h}(\alpha)$$

De plus, $f'(x) = -x e^{-x^2/2} = -h(x)$

$$\Rightarrow \hat{f}'(\alpha) = -i \hat{h}(\alpha) = i \mathcal{F}[-h](\alpha) = i \mathcal{F}[f'](\alpha) = i \cdot i \cdot \alpha \hat{f}(\alpha)$$

i.e. $\hat{f}'(\alpha) = -\alpha \hat{f}(\alpha)$

De plus, $\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \underbrace{e^{-i \cdot 0 \cdot x}}_{=1} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \stackrel{!}{=} 1$

$\Rightarrow \hat{f}$ est solution du problème

$$\begin{cases} \hat{f}'(\alpha) = -\alpha \hat{f}(\alpha) \\ \hat{f}(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \hat{f}(\alpha) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$$

Proposition 5.9 ($\hat{f}$ en sinus & cosinus)

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$. Alors,

(i) Si f est paire,

$$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx$$

Analyse II

(ii) Si f est impaire,

$$\hat{f}(x) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(ax) dx$$

Remarque 5.10

(i) Au vu des formules, on a

f paire $\Rightarrow \hat{f}$ paire

f impaire $\Rightarrow \hat{f}$ impaire

(ii) Ceci nous donne un outil pour définir une transformée de Fourier pour des fonctions $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ en les étendant par (im)paireté sur $]-\infty, 0[$.

Définition 5.11: Produit de convolution

Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx < +\infty$

Le produit de convolution $f * g$ est défini par

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$$

Proposition 5.12: transformée de $f * g$

Soient $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tq $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx < +\infty$

Alors, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f * g(x)| dx < +\infty$

$$\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi} \hat{f} \cdot \hat{g}$$

Idée de la preuve :

$$x = \underbrace{x-t}_{\text{green}} + \underbrace{t}_{\text{blue}}$$

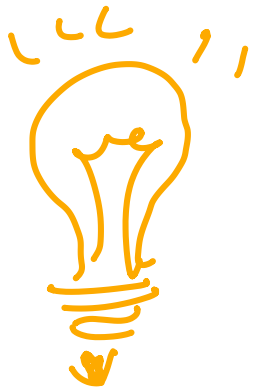
$$\widehat{f * g}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt}_{f * g(x)} e^{-i\alpha x} dx$$

$$f * g(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\alpha t} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(x-t)}_{=y} e^{-i\alpha(x-t)} dx dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\alpha t} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\alpha y} dy}_{\sqrt{2\pi} \cdot \hat{f}(\alpha)} dt = \hat{f}(\alpha) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\alpha t} dt}_{\sqrt{2\pi} \cdot \hat{g}(\alpha)}$$

Chapitre 6 : Quelques applications de l'analyse de Fourier



Une tâche difficile pour transformer :

- la dérivée en multiplication par scalaire (proposition 4.20, 5.7 (i))
- le produit de convolution en multiplication (Proposition 5.12)